De werkgroep Neutrixrekening

Nico Temme
CWI, Amsterdam

INLEIDING

In 1967 werd op het Mathematisch Centrum de werkgroep Neutrixrekening opgericht met als doel de bestudering van neutrices, asymptotiek en omhullende reeksen. In de jaarverslagen 1967, 1968 en 1969 van het MC wordt deze groep vermeld. Prof. J.G. van der Corput had de leiding; hij was in dit verband aan de afdeling Toegepaste Wiskunde als adviseur verbonden en in 1970 werd dit adviseurschap beëindigd. Naast Van der Corput bestond de werkgroep uit Maarten Coolen, Jan Nuis en mijzelf. In deze bijdrage wil ik een schets geven van de activiteiten van deze werkgroep.

WAT IS EEN NEUTRIX?

De theorie van de neutrices werd aan het einde van de vijftiger jaren door Van der Corput ontwikkeld (een eerste publikatie stamt uit 1959) en sproot voort uit zijn onderzoek op het gebied van de asymptotiek. Het bestaansrecht van neutrices demonstreerde hij vaak via divergente integralen. De beta-integraal

$$\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt$$

bijvoorbeeld, bestaat volgens de gangbare definities van het integraalbegrip niet als de reële delen van de complexe getallen p of q negatief zijn. Volgens het principe van analytische voortzetting kan men echter wel betekenis toekennen aan de integraal voor negatieve waarden van de reële delen van p of q , behalve als p of q een van de waarden $0, -1, -2, \ldots$ aanneemt. In de neutrixrekening kan de integraal, door verwaarlozing van zekere functies die oneindig groot kunnen worden, voor alle complexe waarden van p en q gedefinieerd worden (zelfs voor de niet-positieve gehele getallen).

Het verwaarlozen van bijdragen (getallen, functies) die je niet van pas komen. Is dat neutrixrekening? Zo simpel ligt het niet, maar hier komt het wel op neer. Op zich was deze gedachte niet nieuw. Hadamard was Van der Corput hierin bijvoorbeeld voorgegaan met de invoering van het begrip *eindig deel van een integraal*. Ook het begrip *Cauchyhoofdwaarde-integraal* is algemeen bekend en door middel van *distributies* is het eveneens mogelijk divergente integralen te interpreteren.

Van der Corput bestreed niet dat Hadamard hem was voorgegaan, hij introduceerde ook Hadamardneutrices, maar beschouwde zijn neutrixrekening als zijnde veelomvattender dan de eerdere activiteiten op dit gebied. Het wordt tijd voor een definitie.

Definitie Laat $\mathcal{N}$ een additieve groep zijn van functies $\nu(\xi)$ op een domein $\mathcal{N}'$. Stel $\mathcal{N}$ heeft de eigenschap dat elke constante functie die tot $\mathcal{N}$ behoort gelijk aan 0 is. Dan is $\mathcal{N}$ een *neutrix*. De functies $\nu(\xi)$ van $\mathcal{N}$ worden *verwaarloosbaar* in $\mathcal{N}$ genoemd.

Als voorbeeld kan dienen de verzameling $\mathcal{N}$ van functies $\nu(\xi)=c/\xi+\varepsilon(\xi)$ op het domein $\mathcal{N}'=(0,1)$ waarin c een constante is en $\varepsilon(\xi)$ een functie is die voor $\xi \to 0$ tot 0 nadert. Inderdaad, de enige constante functie in $\mathcal{N}$ is de nulfunctie. Van der Corput heeft deze definitie later veel verder gegeneraliseerd en geabstraheerd. De Hadamardneutrix $\mathcal{H}_0$ bestaat uit functies van de vorm $\lambda(\xi)+\varepsilon(\xi)$ waarin $\lambda(\xi)$ een lineaire combinatie is van termen $\xi^\alpha \log^k\xi$, waarin α een complex getal en k een geheel getal ≥ 0 is. De index 0 in $\mathcal{H}_0$ slaat op de plaats waar je oneindige waarden van de functies verwacht.

Bekijk nu eens de integraal

$$\int_\xi^1 \frac{dx}{x^2\sqrt{x}(1+x)}.$$

Aangezien

$$\frac{1}{x^2\sqrt{x}(1+x)} = \frac{1}{x^2\sqrt{x}} - \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)},$$

kunnen we schrijven

$$\int_\xi^1 \frac{dx}{x^2\sqrt{x}(1+x)} = -\frac{2}{3}\frac{1}{x\sqrt{x}}\Big|_\xi^1 + 2\frac{1}{\sqrt{x}}\Big|_\xi^1 + \int_\xi^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}.$$

Er ontstaan bij integratie van de eerste twee termen in het rechterlid dus functies van ξ die in $\mathcal{H}_0$ verwaarloosbaar zijn. De resterende integraal heeft voor $\xi=0$ betekenis en de waarde $\frac{1}{2}\pi$, zodat we ten opzichte van de Hadamardneutrix $\mathcal{H}_0$ de oorspronkelijke integraal als volgt kunnen interpreteren

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2\sqrt{x}(1+x)} = \frac{4}{3} + \frac{1}{2}\pi.$$

Om aan te geven dat dit resultaat verkregen is via de Hadamard neutrix $\mathcal{H}_0$ - en in feite van deze keuze afhankelijk is - werd ook wel de notatie

$$\int_{\mathcal{H}_0}^{1} \frac{dx}{x^2\sqrt{x}(1+x)} = \frac{4}{3} + \frac{1}{2}\pi .$$

gebruikt. Een andere neutrix kan heel wel een ander resultaat opleveren.

Van der Corput verwachtte dat de neutrixrekening op diverse plaatsen in de wiskunde een grote rol zou gaan spelen. Toen hij in 1966 definitief uit de VS terugkeerde gaf hij in Nederland lezingen om deze tak van de wiskunde te propageren. In 1967 kreeg hij in dit opzicht voet aan de grond en was het MC bereid met drie van haar mensen onder zijn leiding een werkgroep te vormen. Maarten en ik waren toen nog niet afgestudeerd. Jan was als medewerker van TW met diverse onderwerpen bezig geweest en zag nu zijn kans schoon op een promotie-onderzoek.

DE DOOS VAN PANDORA

De bijeenkomsten van de werkgroep vonden plaats bij Van der Corput thuis in Buitenveldert. Op de eerste bijeenkomst werden we overdonderd met drie dikke pakketten overdrukken en lecture notes, en een imposante syllabus van 319 pagina's in het Italiaans, getiteld *Neutricis*. De tweede overdondering was kort en bondig: Van der Corput verwachtte binnen anderhalf jaar drie promoties op het gebied van de neutrixrekening. Na zijn Amerikaanse periode vond hij dat promotieonderzoek niet persé 4 jaar hoefde te duren en er was materiaal genoeg. Toen we enigszins bekomen waren was de instructie reeds lang op gang gekomen met een tamelijk abstract betoog over Van der Corput's meest recente ideeën. De eerste doelstelling was via neutrices een nieuw bewijs te leveren van de hoofdstelling van de algebra (een polynoom van de graad n heeft goedgeteld n complexe nulpunten). De aantekeningen die door ons gemaakt werden en per toerbeurt achteraf in het net werden opgeschreven zouden de basis gaan vormen van een boekwerk dat volgens ons gevoel destijds veel andere wiskundeboeken overbodig zou gaan maken. Na drie zittingen over deze materie, waarbij we gaandeweg geen idee meer hadden waar de zaak op uit zou draaien, werd tot teleurstelling van Van der Corput (maar enigszins tot onze opluchting) halt geroepen: op deze manier kon de hoofdstelling van de algebra kennelijk niet bewezen worden. Alle aantekeningen (ook de kladversies) werden door Van der Corput ingenomen; er mocht kennelijk niets naar buiten uitlekken. Tegelijkertijd werd voorgesteld om met concretere zaken te beginnen.

De onderwerpen waar verder aan gewerkt zou gaan worden betroffen

- verdere fundering van de neutrixrekening
- toepassingen in de natuurkunde
- toepassingen in de asymptotiek.

Maarten zou betrokken zijn bij het eerste onderwerp, met als doel distributies te plaatsen in het licht van neutrices. Jan zou het tweede onderwerp nemen, met als eerste werkterrein de potentiaaltheorie, terwijl zijn bedoeling daarbij was via neutrixrekening een betere beschrijving te geven van zekere potentiaalproblemen die in de fysica met niet-strenge methoden werden aangepakt (door middel van divergente reeksen en integralen). Zelf was ik vooral in asymptotiek geïnteresseerd. Van der Corput stelde voor in groepsverband met asymptotiek verder te gaan, terwijl Jan meer individueel met de potentiaalproblemen op gang zou proberen te komen. Maarten zou voorlopig ook daarbij de theoretische aspecten in de gaten houden.

In de asymptotiek komen veel algebraïsche bewerkingen voor (manipulaties met machtreeksen, etc.) waarin aanvankelijk termen optreden die achteraf geen enkele rol meer spelen. Het idee was om via de neutrixrekening dit soort proces op verantwoorde wijze drastisch te vereenvoudigen. De toepassing in de asymptotiek zou gaan over meer-dimensionale integralen waarop de methode van de stationaire fase zou worden toegepast. Daartoe zouden we eerst een stelling gaan formuleren en bewijzen die algemeen van aard was. Deze stelling zou het *kanon* worden waarmee allerlei problemen konden worden aangepakt en dat, amper in stelling gebracht, twee leden van de werkgroep en passant zou gaan uitschakelen.

HET KANON

Op zich is generaliseren in de wiskunde een goede zaak, maar het zou beter geweest zijn als de stelling in minder algemene vorm, bijvoorbeeld tot een-dimensionale integralen beperkt, zou zijn geformuleerd. Het duurde weken voordat de formulering van de voorwaarden achter de rug was en nog eens geruime tijd voordat het bewijs rond was. Dat dit niet over neutrices ging vond ik niet zo erg omdat mijn belangstelling toch meer in de richting van de asymptotiek ging. Het is voor mij een leerzame periode geweest, waarin ik rechtstreeks van een grote autoriteit op het gebied van de asymptotiek instructie kreeg.

Gaande de bewijsvoering werd een intermezzo ingelast, waarover straks meer. Na dit uitstapje werd de draad weer opgevat en kon de stelling toegepast worden. Als eerste voorbeeld diende de integraal

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}(1+x)^\beta \log(\omega+\sqrt{1+x})\, e^{i\omega\sqrt[3]{\omega\gamma\, x-x^2}}\, dx.$$

We waren geïmponeerd, vooral door die derde-machts wortel in de exponent. Niemand zou met de bestaande asymptotische methoden deze integraal voor grote waarden van ω te lijf willen of kunnen gaan (er zouden ook weinig mensen zijn die een dergelijke integraal in de praktijk zouden tegenkomen, maar alla). De aanpak bestond er uit de kritieke punten te vinden, x- waarden die het asymptotisch gedrag bepalen, en deze punten in intervallen onder te brengen waarop de stelling zou worden toegepast. De x-waarden buiten deze intervallen geven asymptotisch gezien verwaarloosbare bijdragen, hetgeen met behulp van een *neutralizator* wordt aangetoond. Van der Corput had de neutralizator in de asymptotiek al veel eerder ingevoerd (met nuttige toepassingen), maar met neutrices heeft dit begrip niets te maken.

De kritieke punten zijn in het bovenstaande geval:

- het punt $x = 0$, omdat dit een eindig randpunt is van het integratie-interval
- het punt $x = \omega\gamma$, omdat hier de fasefunctie (de functie in de e-macht) niet differentieerbaar is
- het punt $x = \frac{1}{2}\omega\gamma$, omdat hier de fasefunctie stationair is (de afgeleide is hier gelijk aan nul).

Op kleine intervallen rechts van $x = 0$ en rond de andere kritieke punten werd tenslotte een methode toegepast die gebaseerd is op partiële integratie. In het finale stadium werden dan neutrices gebruikt om termen die niet relevant waren weg te werken.

Toen ik merkte dat de neutrixrekening in de asymptotiek niet meer voorstelde dan dat ben ik van mijn geloof af gevallen en heb ik mijn deelname aan de groep opgezegd. Ik weet niet meer precies welke woorden en argumenten ik gebruikt heb, maar Jan verzekerde me achteraf dat mijn betoog netjes en duidelijk was. Korte tijd daarna haakte Maarten ook af; hij begon zich meer en meer te interesseren in de theorie van

de partiële differentiaalvergelijkingen en de filosofie van de exacte wetenschappen; hij heeft over beide onderwerpen later aan de UvA lange tijd colleges verzorgd. De werkgroep werd toch voortgezet en begon kritisch af te hangen van wat Jan op dit gebied zou gaan presteren. Ik geef toe, de eerste die opstapt heeft doorgaans makkelijker praten dan de laatste.

EEN INTERMEZZO: OMHULLINGEN

Er ontbrak in de theorie van de formele reeksontwikkelingen een onderdeel dat met neutrices en asymptotiek op zich niet veel te maken had, maar dat volgens Van der Corput wel een belangrijke rol zou gaan spelen: de theorie van de omhullende reeksen.

Men zegt dat de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ het getal S omhult ten opzichte van een majorerende rij A_n als voor elke n geldt dat

$$|S - (a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1})| < A_n.$$

Met andere woorden

$$S = \sum_{m=0}^{n-1} a_m + \theta_n A_n, \quad |\theta_n| < 1.$$

Oorspronkelijk werd deze definitie ingevoerd met $A_n = |a_n|$. Zie bijvoorbeeld de vraagstukkenverzameling van Polya en Szegö.

Van der Corput was in de asymptotiek verzeild geraakt als zuiver wiskundige, maar asymptotiek is een tak van de analyse waarin de wiskundige strengheid nogal eens verwaarloosd wordt. De theorie van de omhullende reeksen kan worden toegepast op asymptotische ontwikkelingen, die in hun volle omvang vaak divergente reeksen blijken te zijn, maar waarmee voor partiële sommen nuttige bovengrenzen kunnen worden afgeleid. Van der Corput dacht met het gereedschap van de omhullende reeksen meer greep op de resttermen van bepaalde asymptotische ontwikkelingen te krijgen. Nu, na zo'n 25 jaar, kan ik uit de praktijk van de asymptotiek konstateren dat dit voor een beperkt aantal gevallen heel fraaie en praktische resultaten heeft opgeleverd, maar niet op grond van de generalisaties die destijds nagestreefd werden. Van der Corput generaliseerde de vorm van de majorant A_n en hij ontwikkelde een nieuwe theorie voor meervoudige reeksen. De verkregen bovengrenzen misten helaas nogal eens eenvoud (berekenbaarheid) en scherpte.

De werkgroep besteedde veel tijd om dit intermezzo tot een goed einde te brengen. Zoals gezegd, deze theorie had niets te maken met neutrices, maar er kwam wél een publikatie, namelijk TW notitie TN-51 (1968) *Omhullende reeksen I*, met als auteur J. G. van der Corput. Dat de namen van de andere leden van de werkgroep niet genoemd werden (in de Inleiding werden we wel genoemd) was waarschijnlijk wel terecht, aangezien de inhoudelijke kant volledig door Van der Corput zelf was geleverd. Ik denk dat dit rapport als externe Engelstalige publikatie wel interessant zou zijn geweest, mits de theorie beperkt was gebleven tot enkelvoudige reeksen.

NABESCHOUWING

Naast Van der Corput hebben ook anderen over neutrices gepubliceerd. Er zijn enkele publikaties op het gebied van de asymptotiek verschenen (waaronder die van Lothar Berg uit de DDR en Riekstins uit Riga), waarin neutrices ter sprake kwamen. De lijst is niet indrukwekkend en het heeft mij, en wellicht ook anderen, niet het idee gegeven dat we de neutrixboot gemist hebben.

Tijdens de asymptotiek-instructies merkte Van der Corput vaak op dat zijn methode alleen werkte voor geïsoleerde kritieke punten en dat hij niet wist hoe de zaak moest worden aangepakt voor kritieke punten die onder invloed van een parameter tot elkaar zouden kunnen naderen. Toch waren op dat moment in de literatuur belangrijke publikaties verschenen die dit soort problemen aanpakten. Achteraf heb ik dan ook geconstateerd dat Van der Corput in de zestiger jaren zodanig door de neutrices in beslag is genomen dat hij enkele fundamentele ontwikkelingen op het gebied van de asymptotiek niet heeft opgemerkt.

Na het vertrek van twee leden van de werkgroep heeft Jan nog enige tijd contact gehouden met Van der Corput, waarbij hij met diverse nieuwe varianten van de neutrixtheorie in aanraking kwam. Toen Van der Corput naar België verhuisde nam het contact op den duur af en raakte ook het werk aan potentiaalproblemen en andere fysische toepassingen op de achtergrond, vooral omdat Jan meer en meer bij managementzaken betrokken werd. De oprichting van SARA, de nieuwbouw en andere managementzaken die leidden tot aanstelling als lid van de directie brachten een flinke dosis niet-verwaarloosbaar werk met zich mee.